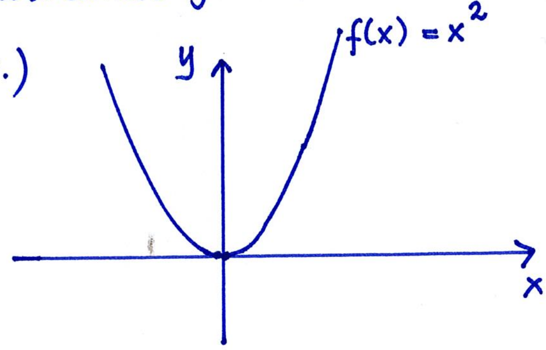
Ma 3c

Repetition av kap. 3.

Kap. 3 Derivator

Bilden av en funktion kallas för en GRAF och ritas in i ett koordinatsystem.

T.ex.)

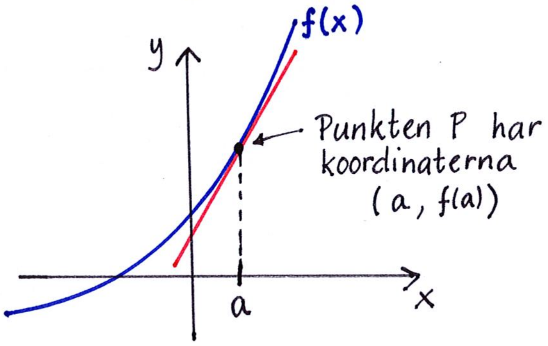


Om man vet x-koordinaten till en punkt, kan man bestämma y-koordinaten genom att sätta in x-värdet i $f(x) = x^2$, för...

$$y = f(x)$$

Derivata

Grafens lutning i varje punkt bestäms av derivatan.



Grafens lutning i den punkt som har x-koordinaten a, dvs punkt P i figuren, är detsamma som lutningen på tangenten i P.

Man kan också säga att...

grafens lutning i P = derivatan i P

$= f'(a)$

uttalas "f prim a"

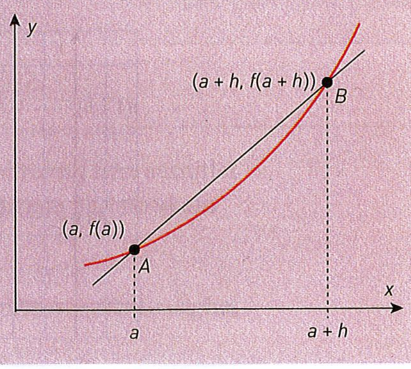
- sid. 126-129 beskriver hur man kommer fram till derivatan genom derivatans definition...

DEFINITION: Derivatan i en punkt

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Detta är derivatan till funktionen $f(x)$ där $x = a$

$f'(a)$ betyder också tangentens k-värde i den punkt där $x = a$



• sid. 130–135 beskriver hur man kan bestämma derivatan med hjälp av deriveringsreglerna...

$f(x) = x^n$ har derivatan $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = k \cdot x^n \Rightarrow f'(x) = k \cdot n \cdot x^{n-1}$
där k är en konstant

Derivatan av en konstant funktion

$f(x) = C \Rightarrow f'(x) = 0$

Derivatan av ett polynom

$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

$f(x) = x^5 + 4x^2 - 9x + 2 \Rightarrow f'(x) = 5x^4 + 8x - 9$

Problemlösning: (att förstå vad derivata är i en text...)

När man vid problemlösning frågar efter...

- hastigheten vid en viss tid
- tillväxthastigheten vid en viss tid
- marginalkostnaden vid en viss produktion

... är det DERIVATAN du ska bestämma.

... och tolka: Du måste också kunna **tolka** ett **derivata**-uttryck och för att kunna göra det måste du förstå skillnaden mellan funktionen och derivatan.
Så här...

Ex.) En vagn rör sig sträckan s meter på tiden t sekunder enligt $s(t) = 3t^2$. Tolka följande:

a) $s(5) = 75$ — Detta betyder att vagnen har rört sig 75 m under de första 5 sekunderna.

b) $s'(5) = 30$ — Detta betyder att vagnens hastighet är 30 m/s precis 5 sekunder efter start.

OBS! Derivata är en förändringshastighet vid en viss tidpunkt.

Utseende på grafer: Det är den största exponenten som bestämmer grafens huvuddrag. Så här ser några kurvor ut...

x^2-kurvor

Positiv koefficient framför x^2.
$y = x^2$
$y = 3x^2$
$y = 5x^2 - 8x + 11$

Negativ koefficient framför x^2.
$y = 2 - x^2$
$y = -x^2 + 6x$
$y = 6x - 0{,}8x^2$

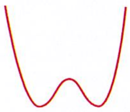
x^3-kurvor

Positiv koefficient framför x^3
$y = 2x^3 - 1$
$y = 5x^2 + 8x + x^3$
$y = -9x^2 + 2x^3$

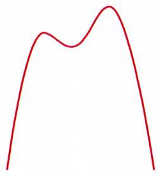
Negativ koefficient framför x^3.
$y = 1 - x^3$
$y = 23 + 8x - 3x^3$
$y = 4x^2 - 0{,}2x^3 + 12x$

x^4-kurvor

Positiv koefficient framför x^4
$y = x^4 + 2x$
$y = 2x^4 - x^3$



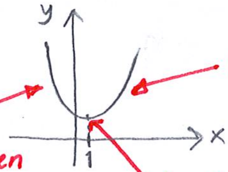
Negativ koefficient framför x^4.
$y = x^2 - x^4$
$y = 1 - 2x^4$



Om man deriverar funktionen, så kan man rita upp derivatagrafen i ett koordinatsystem.
Derivatagrafen visar lutningen på funktionsgrafen.
Andraderivatan = Lutningen på derivatagrafen.

Så här t.ex.) Man har en andragradsfunktion...

Ex.)

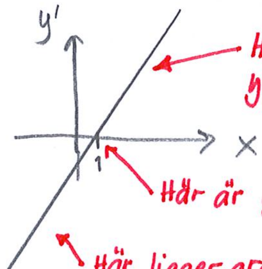


Här är lutningen negativ, så här är y' negativ.

Här är lutningen positiv, så här är y' positiv.

I minimipunkten är y' = 0. Här är x = 1.

Derivata-grafen, dvs grafen till y' blir då...



Här ligger grafen över x-axeln, dvs y' är pos. så det motsvarar den högra delen av grafen y.

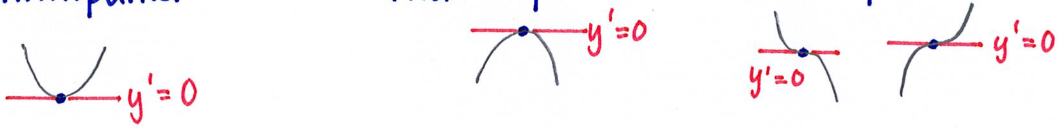
Här är y' = 0, dvs där x = 1.

Här ligger grafen under x-axeln, dvs y' är neg. så det motsvarar den vänstra delen av grafen y.

Extrempunkter = Punkter där en grafs lutning byter tecken/lutning.
Där är derivatan noll. $f'(x) = 0$.

Det finns 3 typer av extrempunkter och det är...

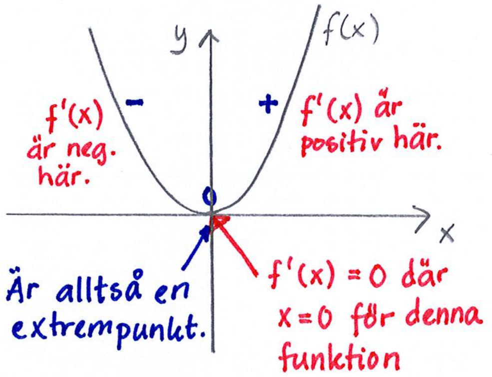
Minimipunkt | Maximipunkt | Terrasspunkt



Beskriva utseendet hos en funktion f(x) och tala om om den har extrempunkter och hur dessa ser ut (max, min eller terrass)

TECKENSTUDIUM

Det använder man för att beskriva lutningen hos f(x) i olika intervall...



Teckenstudiet ser då ut så här...

x		0	
f'(x)	−	0	+
f(x)	↘	MIN	↗

3) Funktionens utseende kan sen ritas.

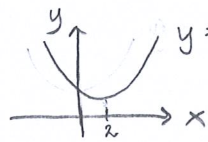
1) Man ritar en x-axel och sätter ut extrempunkternas x-koordinater.

2) f'(x) för extrempunkterna (om det är fler) är noll. Sen bestämmer man f'(x) för x-värden till vänster om, mellan o till höger om extrempunkterna.

ANDRADERIVATAN

Den kan användas för att bestämma om extrempunkterna är max eller min. (ej terrass)
Man kan dock inte använda sig av den om den är noll (alltså om $y'' = 0$). Då måste man istället använda sig av teckenstudium.

Ex.) $y = x^2 + 2x$



Derivatan blir $y' = 2x + 2$.

Andraderivatan blir...

$y'' = 2$

Alltså är extrempunkten en minimipunkt.

Följande gäller...

Om det för en punkt där $x = a$ gäller att $y' = 0$ och...

- $y'' > 0$ (dvs positiv), så har funktionen en minimipunkt för $x = a$.
- $y'' < 0$ (dvs negativ), så har funktionen en maximipunkt för $x = a$.

Skissa grafer och bestämma extrempunkter o största o minsta värde.

När man talar om största o minsta värde är det y-värdet man talar om.

För att göra ovanstående, kan följande "recept" användas...

1) Derivera funktionen.

2) Sätt derivatan till noll, för att hitta x-koordinaten till extrempunkterna.
Alltså bestäm x då $f'(x) = 0$.

3) Använd teckenstudium eller andraderivatan för att bestämma om extrempunkterna är max-, min- och/eller terrasspunkter.

4) Bestäm y-koordinaten för extrempunkterna genom att sätta in x-koordinaten i funktionsuttrycket $f(x)$.

5) Bestäm y-koordinaten för intervallets ändpunkter. (på samma sätt som i punkt 4)

6) Nu har du y-koordinaterna för...

- extrempunkterna
- intervallets ändpunkter

Av dessa bestäms vilket som är störst resp. minst.

Max- och min-problem

Här får du ofta en text som beskriver problemet och frågan, men du måste själv få fram funktionen. Ibland finns funktionen angiven från början.
När du har funktionen löser du max/min problemet genom att följa "receptet" ovan, så långt det behövs. Du måste också bestämma definitionsmängden från början. Avsluta med ett ordentligt svar.

Ex. 1) Rita grafen till funktionen $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 3$ med hjälp av derivata och bestäm koordinaterna för eventuella extrempunkter.

Börjar med att derivera, dvs bestämma y' (= första-derivatan).

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

Bestämmer sen $y' = 0$, dvs letar efter nollställena:

Det är samma sak som EXTREM-PUNKTER.

$$y' = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

(Har alltså dividerat med 3 överallt.)

$$x = 2 \pm \sqrt{4-3}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{1}$$

$$x = 2 \pm 1$$

$$x_1 = 2 + 1 = 3$$

$$x_2 = 2 - 1 = 1$$

$x_1 = 3$ ger $y_1 = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 3 = 27 - 54 + 27 + 3 = 3$

$x_2 = 1$ ger $y_2 = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 3 = 1 - 6 + 9 + 3 = 7$

Alltså: Nu vet man att kurvan har 2 extrempunkter, nämligen: $(3, 3)$ och $(1, 7)$...

... frågan är om de är max, min, eller terrasspunkter:

→

ALT. 1 För att ta reda på det bestämmer man y' för x-värden runt dessa punkter.

T.ex.:

$x = 0 \Rightarrow y' = 3 \cdot 0^2 - 12 \cdot 0 + 9 = 9$ Alltså $y' > 0$ +

$x = 2 \Rightarrow y' = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$ Alltså $y' < 0$ −

$x = 4 \Rightarrow y' = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9$ Alltså $y' > 0$ +

En teckentabell visar då följande:

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	MAX	↘	MIN	↗

ALT. 2 Ett alternativt sätt att bestämma vad extrempunkterna är, är att använda andra derivatan:

$$y'' = 6x - 12$$

Man sätter in extrempunkternas x-värden i y'' och ser om y'' är positiv eller negativ.

$x = 1$ ger : $y'' = 6 \cdot 1 - 12 = -6$ Alltså är det ett MAX.

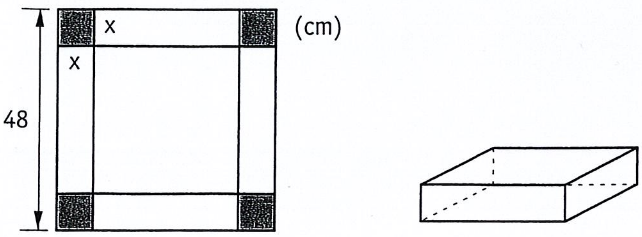
$x = 3$: ger : $y'' = 6 \cdot 3 - 12 = 6$ Alltså är det ett MIN.

Nu vet man att $(1, 7)$ är en maximipunkt och att $(3, 3)$ är en minimipunkt. Då kan man göra en skiss i ett koordinatsystem. För att få skissen av grafen snyggare, kan man bestämma en punkt på varje sida om extrempunkterna, så att man vet lite mer hur man ska skissa.

./.

Ex. 2)

En öppen låda tillverkas så här: Från en kvadratisk skiva med måtten 48 cm × 48 cm skär man bort kvadrater i hörnen och viker upp sidorna. De bortskurna kvadraterna har sidan x cm och lådans volym är y cm^3.



Bestäm lådans maximala volym.

LÖSNING:

- Jag måste först bestämma volymen som en funktion av x. Kallar därför funktionen V(x), men det är samma som y.

$$V(x) = x \cdot (48-2x)^2 = 2304x - 192x^2 + 4x^3$$

Man måste skriva om den till termer, för annars kan man inte derivera.

Se lådan ovan. Detta är höjden.

Bottnen är en kvadrat, så arean av bottenplattan är sidan i kvadrat.

Alltså...

$$V(x) = 2304x - 192x^2 + 4x^3$$

- Definitionsmängden bestäms genom att titta på när V(x) = 0, för det är en gräns — volymen kan ju inte vara negativ.

$$x \cdot (48-2x)^2 = 0$$

$x = 0$

$48 - 2x = 0$
$48 = 2x$
$24 = x$

Alltså $x > 0$, för en sida kan ju inte vara negativ...
... men $x < 24$, för om $x > 24$ blir sidan $48-2x$ negativ.

Definitionsmängden är alltså: $0 < x < 24$

- Jag måste hitta extrempunkterna och se om det finns en maximipunkt, för då har man hittat vilket x-värde som ger maximal volym.

Följer nu "receptet"...

1) Derivera funktionen: $V'(x) = 2304 - 192 \cdot 2x + 4 \cdot 3 \cdot x^2 \Rightarrow$

$$V'(x) = 2304 - 384x + 12x^2$$

→

(forts. Ex. 2)

2) Bestäm $f'(x) = 0$... Här blir det $V'(x) = 0$.

$$2304 - 384x + 12x^2 = 0$$

$$12x^2 - 384x + 2304 = 0$$

$$x^2 - 32x + 192 = 0$$

$$x = 16 \pm \sqrt{256 - 192}$$

$$x_1 = 8$$

$x_2 = 24$ ← OBS! Denna ligger utanför definitionsmängden, så den kan inte användas.

3) Undersöker om extrempunkten är max, min eller terrass...

Använder y'' (här motsvarar det $V''(x)$).

$$V''(x) = -384 + 24x$$

Bestämmer $V''(8) = -384 + 24 \cdot 8 = -192$

x-värdet för extrempunkten.

Eftersom $V''(8)$ är negativ är den en MAXIMIPUNKT.

- Konstaterar nu att lådan har en maximal volym, när $x = 8$.

Den volymen kan jag få fram genom att bestämma $V(8)$, dvs sätta in $x = 8$ i ursprungsfunktionen.

$$V(8) = 2304 \cdot 8 - 192 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^3 = 8192 \text{ cm}^3 \approx 8200 \text{ cm}^3$$

Svar: Lådans största volym är $8192 \text{ cm}^3 \approx 8200 \text{ cm}^3$.

./.